#### Лекция № 6

###### 3. Геометрическая интерпретация ОЗЛП

Рассмотрим случай, когда

*n*  *m*  2 ; *r*  *m* .

Выберем в качестве свободных переменных

*x*1 и

*x*2 . Тогда можно

построить

*m*  *n*  2 уравнений вида:

*x*3  31*x*1  32 *x*2  *b*3 

*x*   *x*   *x*  *b* 

4 41 1 42 2 4 

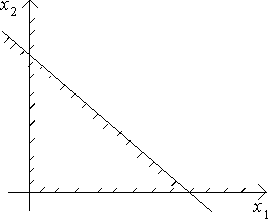
(3.1)

................................ 



*xn*  *n*1 *x*1  *n* 2 *x*2  *bn* 

Согласно формулировке ОЗЛП



*x*3  0

*x*1 , *x*2 ,..., *xn*

также должны быть неотрицательными, т.е.:

*x*3  31*x*1  32 *x*2  *b*3  0 



*x*4  

41*x*1

 42 *x*2

* *b*4

 0

(3.2)

................................ 



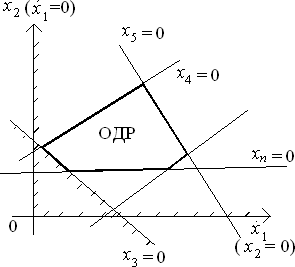
*xn*  *n*1 *x*1  *n* 2 *x*2  *bn*  0

*x*1  0 ,

*x*2  0 .

Пусть

*x*3  0 , тогда

31*x*1 32 *x*2  *b*3  0

прямой. Например,

- уравнение

*x*3  0 ; По одну

её сторону

*x*3  0 , по другою:

*x*3  0

(по какую

*x*3  0

и по какую

*x*3  0 -

*зависит от коэффициентов уравнения*).

Точно также получим

уравнения прямых

*x*4  0,..., *xn*  0 .

Каждая такая прямая определяет «допустимую полуплоскость» (вместе с

*x*1  0, *x*2  0

– всего *n* прямых). Часть плоскости

*x*1 ,

*x*2 , принадлежащая

*одновременно* всем *допустимым* полуплоскостям, образует *область допустимых решений* (ОДР).

ОДР – всегда образует выпуклый многоугольник (выпуклая фигура обладает свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то весь отрезок АВ также принадлежит ей).

Пример 1. Задача линейного программирования с семью переменными

*x*1 , *x*2 ,..., *x*7

имеет

*m*  5 уравнений (ограничений):

*x*1  *x*2  *x*3  4 

2*x*1  *x*2  *x*3  *x*4  5 



*x*1  *x*2  *x*5  4 

(3.3)

*x*2  *x*6  5 

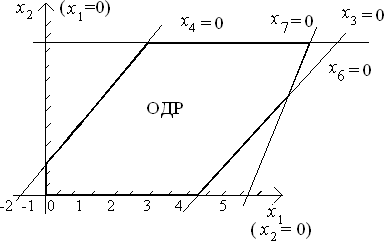


Пусть

*x*1 , *x*2

2*x*1  2*x*2  *x*6  2*x*7  7

- свободные переменные.

Из 1-го уравнения: Из 3-го уравнения: Из 4-го уравнения:

*x*3  *x*1  *x*2  4 *x*5  *x*1  *x*2  4 *x*6  *x*2  5

(3.4)

(3.4)

Подставляя (3.4) во второе уравнение (3.3) и (3.5) – в последнее и, разрешая

относительно *x*4 и *x*7 , имеем:

*x*4  3*x*1  2*x*2 1

*x*  *x*  1 *x*

 6 .

7 1 2 2

После этого легко строится ОДР (если она существует).

Теперь возникает вопрос о нахождении из числа допустимых решений оптимального решения, т.е. такого, которое обращает в min линейную функцию

*E*  *c*1*x*1  *c*2 *x*2 ... *cnxn*

(3.6)

Дадим и для этой задачи геометрическую интерпретацию опять для

случая

*m*  *n*  2 .

Пусть

*x*1 , *x*2

* свободные переменные,

*x*3 , *x*4 ,..., *xn*

* базисные. Базисные

переменные выражаются через свободные (см. формулы (3.2)). Подставим (3.2) в (3.6) и приведением подобных членов получим:

*E*   0  1*x*1   2 *x*2

Очевидно, формула (3.7) достигает минимума при тех же

*x*1 и

(3.7)

*x*2 , что и

функция

*E*  1*x*1   2 *x*2

(линейная форма).

Действительно,

*E*  *E*   0 , где  0

* не зависит от

*x*1 и

*x*2 , и поэтому

минимумы *E* и *E*, отличающиеся на  0

, достигаются при одних и тех же *x*1

и *x*2 .

*x*2

*c*2

 2

*c*1

 2





*c* 

*x*

1

1 1

*E*  *c*

1

*E*  *c*

2

*tg*  *tg* (   )   1

 2

Пусть

*E*  1 *x*1   2 *x*2  *C*

* уравнение прямой. Прямая отсекает на оси *x*2

отрезок

*c* , а на оси

#####  2

*c*

*x*1 - отрезок ;



1

Очевидно, различные С порождают серию параллельных прямых с

 1 



угловым коэффициентом 



 . Вместо них можно, рассмотреть *основную*

2 

*прямую*

*E*  0

( *E*  1*x*1   2 *x*2  0). Так как,

*E*  0 , то по одну её сторону *E*

будет возрастать, по другою – убывать.

Построим основную прямую

*x*2



*E*  0 . Угловой коэффициент равен

 1 .

#####  2

  1

 2

*x*1 1



*x*2

  1

 2

*x*

*E*  0

 1  0

*E*  0

 1  0

 2  0

 2  0

*x*2



*x*2

*E*  0

 2

*x*

  1

 1  0



  1

*E*  0

 2

*x*

1 1

 1  0

 2  0

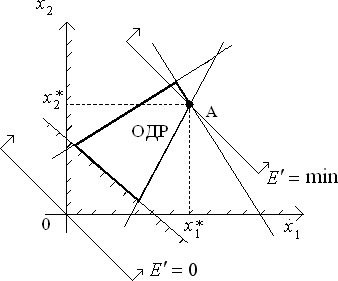
 2  0

Таким образом, и направление основной прямой и направление

убывания линейной формы зависит от значений и знаков коэффициентов  1 и

 2 .

Пусть теперь имеется ОДР, основная прямая и известно направление убывания её.



Точке А – есть оптимальное решение ( *x*\* , *x*\* ).

1 2

Для других переменных оптимумы:

*x*\*   *x*\*   *x*\*  *b*

3 31 1 32 2 3

*x*\*   *x*\*   *x*\*  *b*

4 41 1 42 2 4

................................

*x*\*   *x*\*   *x*\*  *b*

*n n*1 1 *n* 2 2 *n*

*E*min

  0

 1

*x*\*   \*

(3.8)

Т.о. если

1

*x*

2

1

*n*  *m*  2 и

*r*  *m* , т.е. две свободные переменные, то решение

может быть получено геометрическим построением.

Пример 2. В условиях примера 1 найти оптимальное решение, обращающее в min .

*E*  *x*1  *x*2  2*x*3  *x*4  3*x*5  *x*6  2*x*7

Уравнения-ограничения те же (3.3).

(3.9)

Мы имеем:



*x*3  *x*1  *x*2  4 

*x*4  3*x*1



 2*x*2  1 



*x*5  *x*1  *x*2  4 

(3.10)

*x*6  *x*2

*x*  *x*

 5

* 1 *x*





 6

7 1 2 2 

Поставляя (3.10) в (3.9) получим:

*E*  5*x*1  2*x*2 12

Вспомним ОДР из примера 1 (см. рис.).

Имеем:

*E*  5*x*1  2*x*2

Строим прямую

*E*  0 . Знаки при  1

и  2

дают направление убывания

*E*. Теперь перемещением прямой

и

*E*  0

параллельно себе найдём точку А.

Координаты этой точки и дают оптимум

*x*

\* *x*\* .

В точке А пересекаются ограничивающие прямые

2

1

*x*6  0 и

*x*7  0:

 *x*  5  0 

2



* *x*1
* 1 *x*

2 2

 6  0





Решая их совместно получим:

*x*\*  8,5 ;

*x*\*  5 .

Из (3.10):

1

2

*x*\*  0,5 ; *x*\*  16,5 ; *x*\*  17,5 ; *x*\*  *x*\*  0 .

3 4 5 6 7

Из (3.11)

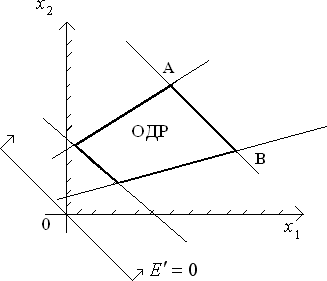
*E*min  64,5.

Отметим подмеченные для *n-m*=2 случая закономерности:

1. Решение задачи ОЗЛП, если оно существует, не может лежать внутри ОДР, а только на её границе.
2. Решение ОЗЛП может быть не единственным. Действительно, если

*E*  0 параллельна той стороне ОДР, где достигается минимум *E*, то

он достигается не в точке, а на всей этой стороне (бесчисленное множество оптимальных решений).

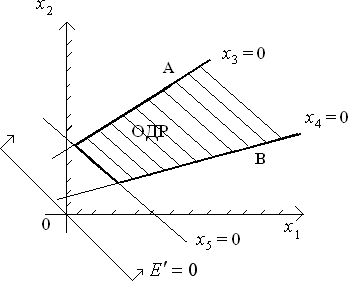


На стороне АВ – бесчисленное множество оптимальных решений, т.к. эта

сторона параллельна линии

*E*  0 .

1. ОЗЛП может не иметь решения даже в случае, когда существует ОДР. Это бывает, когда в направлении стрелок ОДР не ограничена, т.е. в обл. допустимых решений *E* не ограничена снизу. Перемещая основную прямую в направлении стрелок, мы будем получать всё меньшие и меньшие значения *E*, а значит и *E* .



1. Решение ОЗЛП, минимизирующее функцию *Е* (оптимальное решение). достигается в одной из вершин многоугольника допустимых решений (если оно достигается на целой стороне, то оно же достигается и в каждой из вершин, через которые проходит эта сторона). Решение, необязательно оптимальное, лежащее в одной из вершин ОДР, называется *опорным решением*, а сама вершина – *опорной точкой*.
2. Для того, чтобы найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины ОДР (опорные точки) и выбрать из них ту, где *Е* достигает минимума.
3. Если число свободных переменных в ОЗЛП равно 2, а число базисных -

*m* и решение ОЗЛП существует, то оно достигается в точке, где по

крайней мере две из переменных

*x*1 , *x*2 ,..., *xn*

обращаются в нуль.

Действительно, в любой опорной точке пересекаются по крайней мере две из ограничивающих прямых; могут же в ней пересекаться и более двух.

Случай, когда в оптимальном решении обращаются в нуль не 2, а больше переменных, называется **вырожденным**.

Если теперь

*n*  *m*  3, то свободных переменных 3 (напр.,

*x*1, *x*2 , *x*3 ):

*x*4  41*x*1  42 *x*2  43 *x*3  *b*4 

*x*   *x*   *x*   *x*  *b* 

5 51 1 52 2 53 3 5 

................................ 



Каждое условие

*xn*  *n*1*x*1  *n* 2 *x*2  *n*3 *x*3  *bn* 

*xk*  0 , ( *k*  4,..., *n* ) - даёт плоскость; по одну сторону

её *xk*

* 0 , по другую

*xk*  0 .

Условие

*x*1  0

→ координатная плоскость

*x*2*Ox*3 ;

Условие

*x*2  0 → координатная плоскость

*x*1*Ox*3 ;

Условие

*x*3  0

→ координатная плоскость

*x*1*Ox*2 ;

ОДР (если существует) – *выпуклый многогранник*, ограниченный этими плоскостями, т.е. часть пространства, для которой выполнены все условия:

*x*1  0 ; Целевая функция

*x*2  0 ;

*x*3  0 ; … ;

*xn*  0 .

*E*   0  1*x*1   2 *x*2   3 *x*3

*E*  *E*   0

* линейная форма.

###### Основная плоскость:

1*x*1   2 *x*2   3 *x*3  0.

Точка А, в которой достигается оптимальное решение (если оно существует), представляет собой ту вершину ОДР, которая находится дальше всего от начала координат, считая по направлению убывания *E*. Может

оказаться, как и при

*n*  *m*  2 , что ОЗЛП имеет бесчисленное множество

решений, либо заполняющих целое ребро, либо целую грань многогранника

допустимых решений (МДР). Оптимальное решение

*x*\* ,

*x*\* ,

\* (если оно

существует) совпадает с одной из опорных точек, т.е. вершин многогранника,

1

2

*x*

3

в которой по крайней мере три переменных из

*x*1 , *x*2 ,..., *xn*

обращаются в нуль.

Нам геометрическая интерпретация понадобилась для того, чтобы обосновать следующие свойства решения ОЗЛП при любых значениях

числах переменных *n* и числа уравнений

*m*  *n*.

Выводы:

1. Оптимальное решение, если оно существует, лежит не внутри, а на границе ОДР, в одной из опорных точек, в каждой из которых по крайней мере *k* из переменных обращаются в нуль.
2. Для того, чтобы найти оптимальное решение, нужно, переходя из одной опорной точки к другой, двигаться в направлении уменьшения функции *Е*, которую требуется минимизировать.

###### 4. ЗЛП с ограничениями – неравенствами. Переход от неё к ОЗЛП и обратно.

Пусть все ограничения-неравенства заданы в стандартной форме:

*a*11*x*1  *a*12 *x*2  ...  *a*1*n xn*  *b*1  0 



*a*21*x*1

 *a*22 *x*2

 ...  *a*2*n xn*

 *b*2  0 



(4.1)

........................................................

*am*1 *x*1  *am*2 *x*2  ...  *amnxn*  *bm*  0 

Неравенства линейно не зависимы.

ЗЛП: Найти

*xi*  0 , *i*  1, *n*

такие, чтобы удовлетворяли условиям (4.1) и

линейная функция

обращалась в минимум. Переход от ЗЛП к ОЗЛП:

Введем обозначения:

*E*  *c*1*x*1  *c*2 *x*2 ... *cnxn*

(4.2)

*y*1  *a*11*x*1  *a*12 *x*2  ...  *a*1*n xn*  *b*1 



*y*2  *a*21*x*1

 *a*22 *x*2

 ...  *a*2*n xn*

 *b*2 



(4.3)

Здесь

*y*1 , *y*2 ,..., *ym*

........................................................

*ym*  *am*1 *x*1  *am*2 *x*2  ...  *amnxn*  *bm* 

– новые добавочные как бы базисные переменные, которые

согласно (4.1) должны быть неотрицательными. Теперь можно сформулироват ОЗЛП, эквивалентную исходной ЗЛП с ограничениями:

найти такие

*xi*  0 ;

*i*  1, *n* и

*y j*  0 ;

*j*  1, *m*

(т.е.

*n*  *m*

переменных), чтобы

удовлетворялись равенства (4.3) и линейная функция

*E*  *c*1*x*1  *c*2 *x*2 ... *cnxn*  0 *y*1  0 *y*2 ... 0 *ym*  min

Итак, при переходе от ЗЛП с неравенствами к ОЗЛП с равенствами общее

количество переменных равно

*n*  *m*

(увеличивается на *m* ).

Пример 1. Найти неотрицательные значения условиям

*x*1 , *x*2 , *x*3 , *x*4 , *x*5

удовлетворяющие

2*x*1  *x*2  3*x*3  6

*x*3  3*x*2  1 



(4.4)

*x*  2*x*  *x*   

5 4 1 1

*x*5  *x*1  0 

и обращающие в минимум функцию

*E*  *x*1  2*x*2  3*x*3

Требуется привести к ОЗЛП.

Решение: Приводим неравенства (4.4) к стандартной форме:

 2*x*1  *x*2  3*x*3  6  0 3*x*2  *x*3 1  0

*x*1  2*x*4  *x*5 1  0

*x*1  *x*5  0

Вводим добавочные переменные:

*y*1  2*x*1  *x*2  3*x*3  6

(4.5)

*y*2  3*x*2  *x*3 1 





(4.6)

*y*3  *x*1  2*x*4  *x*5 1 

*y*4  *x*1  *x*5 

Теперь получим ОЗЛП: найти неотрицательные

*xi* ,

*i*  1, 5 ;

*y j* ,

*j*  1, 4 ,

удовлетворяющие (4.6) и обращающие в минимум (4.5).

Возможен обратный переход от ОЗЛП к задаче с ограничениями- неравенствами. Если в первом случае мы увеличивали число переменных на *m* , то во втором – будем его уменьшать на *m* , устраняя базисные и оставляя только свободные переменные.

Пример 2.

*x*1  *x*2  1

*x*2  2*x*3  3

*x*3  *x*4  *x*5  1

*E*  *x*1  *x*2  *x*5

(4.7)

(4.8)

Решение: т.к.

*m*  3 ,

*n*  5 ,

*n*  *m*  2 , то выберем 2 переменные в

качестве свободных. Так как свободные переменные должны быть

независимыми (чтобы им давать произвольные значения), то

*x*1 и *x*2

отпадают как свободные. По той же причине отпадают и

*x*2 , и

*x*3 . Поэтому в

качестве свободных выберем

*x*1 и *x*4 , и выразим через них остальные:



*x*2  *x*1 1 



*x*   1 *x*  2 

3 1 

2 



(4.9)

*x*  1 *x*

5 2 1

 *x*4 1





Т.к.

*x*2  0 ,

*x*3  0 ,

*x*5  0 , условия (4.9) могут быть заменены неравенствами:



 *x*1 1  0 



 1 *x*  2  0

1 

2 

(4.10)

1 *x*  *x* 1  0

2 1 4 

Найдём для *Е* выражение через

*x*1 и

*x*4 :

*E*  *x*  *x* 1 1 *x*  *x* 1  1 *x*  *x*  2

1 1 2 1 4 2 1 4

*E*  1 *x*  *x*

– линейная форма (4.11)

2 1 4

###### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение области допустимых решений (ОДР) при графическом решении задач ЛП.
2. Что такое основная прямая, её роль и метод построения при графическом решении задач ЛП.
3. Перечислите основные закономерности, подмеченные для двух свободных переменных при графическом решении задач ЛП.
4. Объясните – можно ли указанные выше закономерности распространить и для случая трёх свободных переменных.
5. Опишите схему перехода от ЗЛП с ограничениями неравенствами к ОЗЛП и обратно.